СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ОБЗОР ДЛЯ СПЕЦСЕМИНАРА «Алгебра над алгоритмами и эвристический поиск закономерностей»

Дьяконов А.Г.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Спектральная теория графов

Spectral Graph Theory

изучает свойства графов с помощью анализа

1) **собственных значений,**
2) **собственных векторов,**
3) **характеристических полиномов**

матриц, которые связаны с графами:

1) **матрица сопряжённости,**
2) **матрица Лапласа,**
3) **беззнаковая матрица Лапласа.**

Спектр

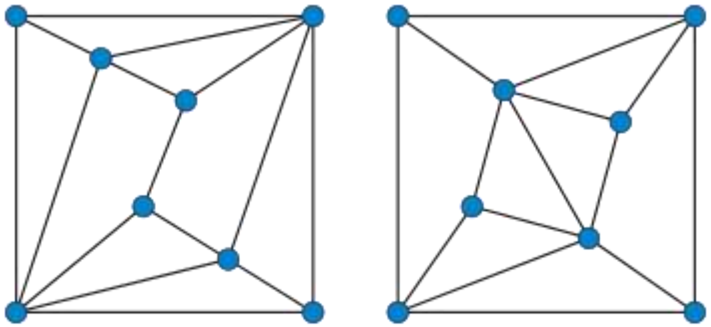
– мультимножество собственных значений.

Графы с одинаковыми спектрами – изоспектральные.

Изоспектральные графы не всегда изоморфны: $K_{1,4}$ и $C_4 \cup K_1$.

[Skiena, S. Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA: Addison-Wesley, p. 85, 1990.]

Ещё пример (из полиэдральных графов).



Теорема. Почти все деревья изоспектральны.

Есть перечень известных изоспектральных графов, см.
http://mathworld.wolfram.com/CospectralGraphs.html

Зачем нужен "алгебраический" подход к анализу графов

Инвариант Колен де Вердьера $\mu(G)$ — наибольший коранг ($n - \operatorname{rank}(M)$) среди всех матриц $M \in \mathbf{R}^{n\times n}$:

1) $M_{ij} = \begin{cases} < 0, & (i,j) \in E, \\ 0 & (i,j) \notin E. \end{cases}$

2) только одно отрицательное собственное значение (кратности 1),

3) выполняется строгая гипотеза Арнольда

Строгая гипотеза Арнольда:

не существует симметричной матрицы $\mathrm{O}^{n\times n} \neq X \in R^{n\times n}$: $MX = 0$,

$$X_{ij} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} i = j, \\ M_{ij} \neq 0. \end{array} \right.$$

в монографиях – чуть по-другому

Критерии

$\mu \leq 0$ тогда и только тогда, когда нет рёбер

$\mu \leq 1$ тогда и только тогда, когда линейный лес

объединение путей

$\mu \leq 2$ тогда и только тогда, когда внешнепланарный граф

при добавлении вершины и рёбер, которые соединяют текущие вершины с добавленной получаем планарный граф

$\mu \leq 3$ тогда и только тогда, когда планарный граф

$\mu \leq 4$ тогда и только тогда, когда G linklessly embeddable graph

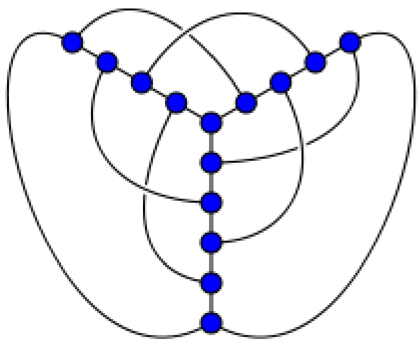
Если вложим в бутылку Клейна, то $\mu \leq 5$

Если вложим в тор, то $\mu \leq 6$

Если вложим в пов-ть с отрицательной характеристикой Эйлера k, то $\mu \leq 4-2k$

Любой граф может быть раскрашен в $\mu(G)+1$ цвет (не доказано?)

Минимальное число пересечений при изображении графа на плоскости $\geq \mu(G)-3$.



Свойства

Если дополнение графа является линейным лесом, то $\mu(G) \geq |G| - 3$

Если дополнение графа является внешнепланарным графом, то $\mu(G) \geq |G| - 4$

Если дополнение графа G является планарным графом, то $\mu(G) \geq |G| - 5$

Монотонность

Если H получен из G с помощью следующих операций ("минорирование"):

1) удалением изолированных вершин,

2) удалением рёбер,

3) сжатием (схлопыванием) рёбер ,

тогда $\mu(H) \leq \mu(G)$.

Для справки

Теорема Робертсона-Сеймура-Томаса

Любое наследуемое свойство графов характеризуется конечным числом запрещенных подграфов.

Наследуемые свойства

планарность, внешнепланарность, вложение в поверхность.

Проблема

вычисление инварианта

Итак, начнём... Граф $G=(V,E)$

Чащё – неориентированные простые (без кратных рёбер и петель) конечные графы.

иногда – взвешенные.

Матрицы	
сопряжённости	$A\in\{0,1\}^{n\times n}$: $A_{ij}=1\Leftrightarrow(i,j)\in E$
диагональная матрица степеней	$D_{ij}=\begin{cases}\deg(i), & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$
Распределений (diffusion).	$W=D^{-1}A$
Лапласа	$L=D-A$, $L=NN^{\mathrm{T}}$
Беззнаковая Лапласа	$Q=D+A$, $Q=MM^{\mathrm{T}}$
инциденций	$M_{ij}=1\Leftrightarrow i\in e_j$
инциденций орграфа	$N_{ij}=\begin{cases}+1, & e_j=(i,*),\\ -1, & e_j=(*,i),\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$

Напомним...

Собственный вектор (матрицы M) – ненулевой вектор x, для которого справедливо

$$Mx = \lambda x.$$

Отношение Релея –

$$\frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{x^{\mathrm{T}}x}.$$

Для собственного вектора – $\frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{x^{\mathrm{T}}x} = \lambda$**.**

Теорема. Пусть M **– симметричная матрица, тогда максимум отношения Релея равен максимальному собственному значению.**

Простое доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2Mx(x^{\mathrm{T}}x) - 2x(x^{\mathrm{T}}Mx)}{(x^{\mathrm{T}}x)^2} = 0,$$

$$Mx = \frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{(x^{\mathrm{T}}x)}x.$$

Что есть в матрицах...

A_{ij} – **число путей из вершины** i **в вершину** j.

$\mathrm{tr}(A^2) = 2|E|$, $\mathrm{tr}(A^3) = 6k$, k – **число треугольников в графе.**

Теорема Если граф связный (неориентированный) с диаметром d**, то существует как минимум** $d+1$ **различное с.з. матрицы** A **(аналогично** L, Q**).**

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ **– все различные с.з., тогда**

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\ldots\cdot(A-\lambda_k I)=0,$$

поэтому $A^k \in \Lambda(I, A, \ldots, A^{k-1})$**. Но если диаметр достижим для пары вершин** (i, j)**, то**

$$A_{ij}^t = \begin{cases} 0, & t<d, \\ >0, & t=d. \end{cases}$$

Поэтому $k>d$**.**

Матрица Лапласа

$$L = D - A$$

Квадратичная форма Лапласа –

$$x^{\mathrm{т}} L x = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2 \,,$$

$$\mathbf{R}^{|V|} \to \mathbf{R}\,.$$

Теорема. Минимальное с.з. = 0

Доказательство:

1) т.к. все с.з.неотрицательны, а матрица вырождена.

2) КФЛ неотрицательна, обращается в ноль. Вспоминаем отношение Релея.

Теорема. $\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow$ **граф связный**

Доказательство.

Если несвязный – в явном виде строятся два ортогональных собственных вектора.

Если связный, то берём вектор ортогональный к константному, в нём есть два различных элемента x_i, x_j**, учитывая, что вершины** i, j **соединяет путь, выражение**

$$x^{\mathrm{T}} L x = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2$$

будет положительно.

λ_2 **называют алгебраической связностью графа** [Fiedler]

Монотонно не убывает при добавлении рёбер, так как

$$\min_{x^{\mathrm{T}} \tilde{1} = 0} \frac{x^{\mathrm{T}} L x}{x^{\mathrm{T}} x} = \lambda_2.$$

Проблема вложения графа [Hall, 70]

Вложить граф в прямую:

$$x^{\mathrm{T}} L x = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2 \to \min_x \,,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ **– координаты наших вершин.**

Избежать очевидного константного решения:

$\tilde{1}^{\mathrm{T}} x = 0$**,**

учесть масштаб:

$\| x \| = 1$**.**

Решение – собственный вектор, соответствующий второму по величине с.з. матрицы Лапласа.

Проблема вложения графа [Hall, 70]

Теперь вкладываем в плоскость:

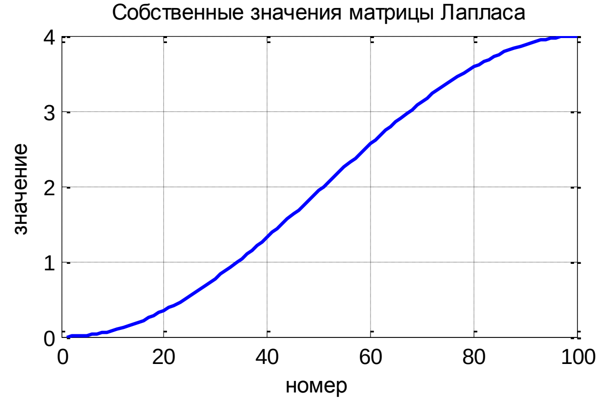
$$\sum_{(i,j)\in E} \| (x_i, y_i) - (x_j, y_j) \|^2 = \sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j)^2 + \sum_{(i,j)\in E} (y_i - y_j)^2 \to \min$$

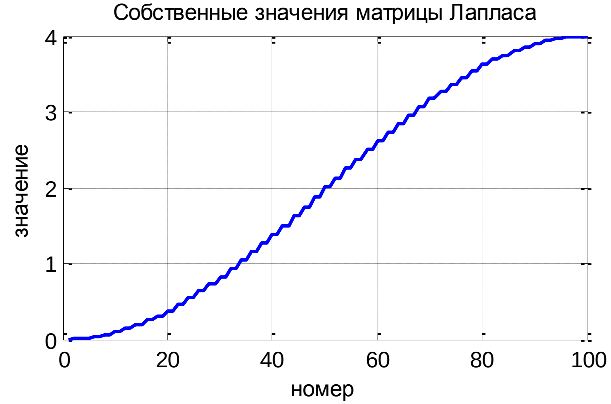
при условии

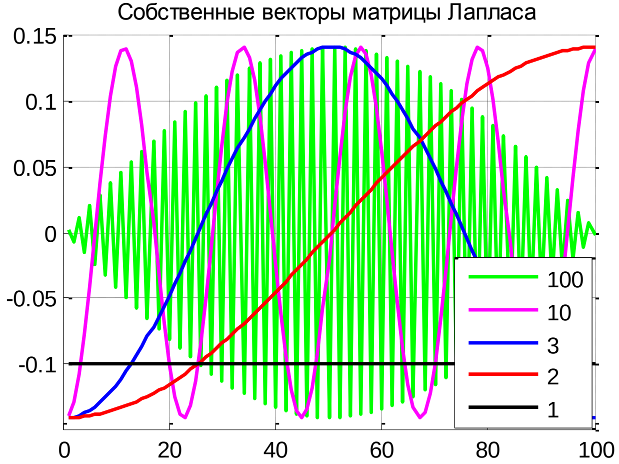
$$\sum_{i\in V} (x_i, y_i) = (0,0).$$

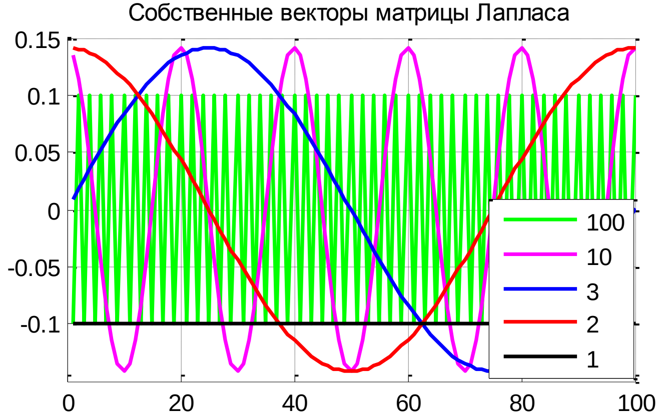
Если добавить условие ортогональности x и y, то получим, что решение – с.в., соответствующие второму и третьему с.з. матрицы Лапласа.

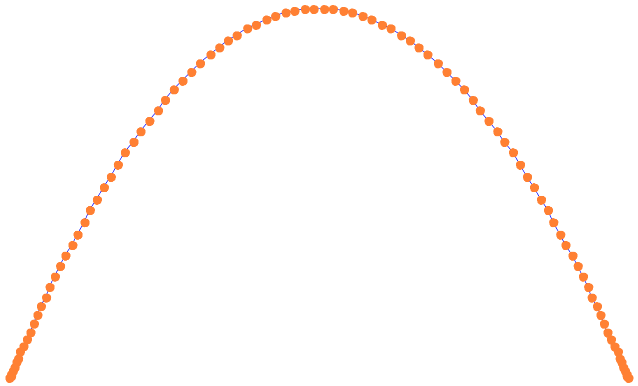
Вот почему визуализация графа по с.з.!

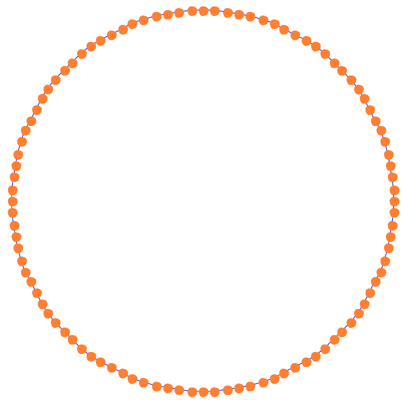

Собственные значения матрицы Лапласа
значение
номер
0
1
2
3
4
20
40
60
80
100

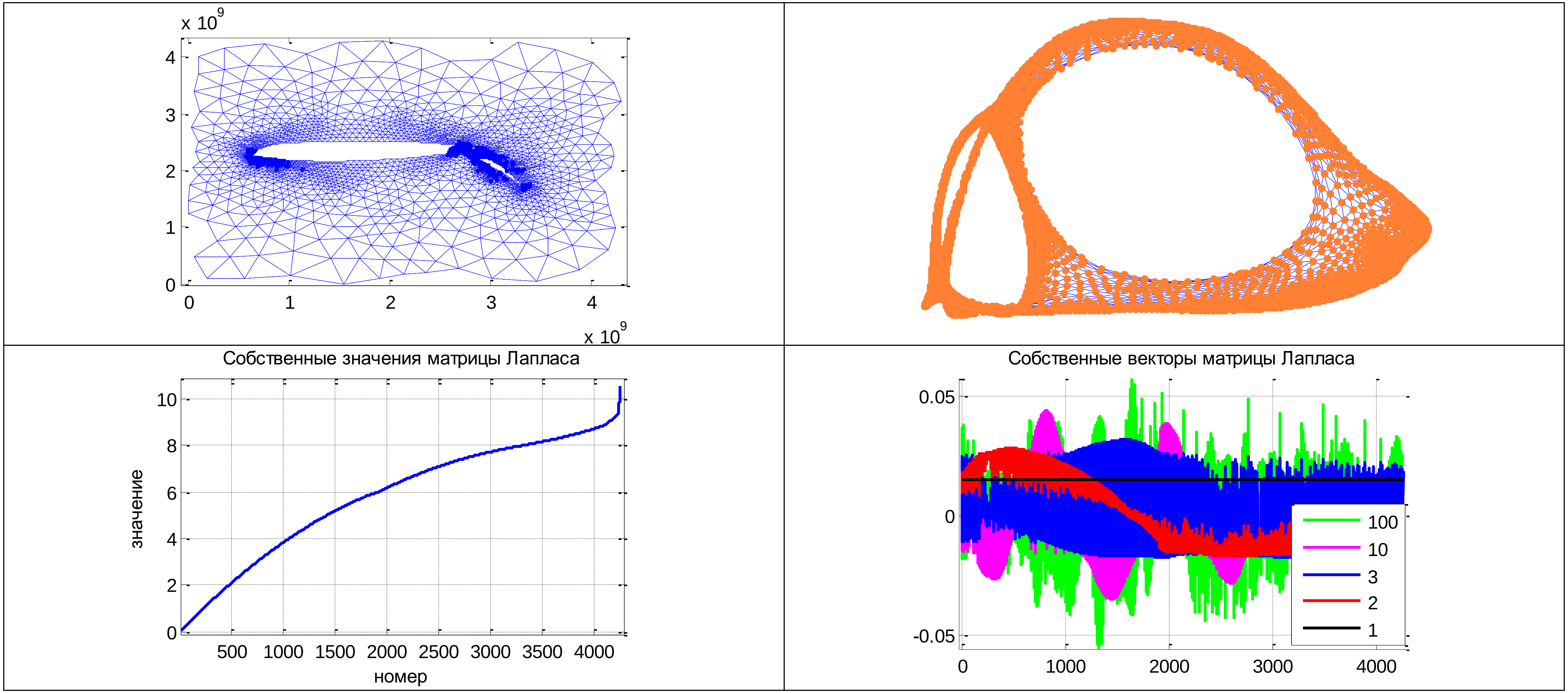

Собственные значения матрицы Лапласа
значение
номер
0
1
2
3
4
20
40
60
80
100


Собственные векторы матрицы Лапласа
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
20
40
60
80
100
100
10
3
2
1


Собственные векторы матрицы Лапласа
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
20
40
60
80
100
100
10
3
2
1







[Hal70] K. M. Hall. An r-dimensional quadratic placement algorithm. Management Science, 17:219-229, 1970.

Разбиение графа

Рёберная граница – $\partial S = \{(i, j) \in E \mid i \in S, j \notin S\}$.

Число Чигера (изопериметрическое число) – $h(G) = \min\limits_{0<|S|\le n/2} \frac{|\partial S|}{S}$.

Оценивает, есть ли в графе "узкое горло".

Теорема. $h(G) \ge \lambda_2 (1-s)/2$, где $s = |S|/|V|$.

Если λ_2 – большое с.з., то граф "сильно связан".

Неравенство Чигера [Wiki]

В k-регулярном графе $(k-\lambda_2)/2 \le h(G) \le \sqrt{2k(k-\lambda_2)}$

Часто называют одним из основных результатов в СТК.

Теорема. $h(G) \geq \lambda_2 (1-s)/2$**, где** $s = |S|/|V|$**.**

Доказательство. Известно, что

$$\min_{x^{\mathrm{T}}\tilde{1}=0} \frac{x^{\mathrm{T}} Lx}{x^{\mathrm{T}} x} = \lambda_2.$$

Поэтому для любого вектора x **ортогонального к** $\tilde{1}$ **выполняется**

$$x^{\mathrm{T}} Lx \geq \lambda_2 x^{\mathrm{T}} x.$$

Если $x = x_S - s\tilde{1}$**, где** x_S **– характеристический вектор множества** S **(поправка** x_S **до ортогональности к** $\tilde{1}$**), то**

$$x^{\mathrm{T}} Lx = \sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j) = |\delta S|$$

и $x^{\mathrm{T}}\tilde{1} = 0$**.**

Из

$$x^{\mathrm{T}} x = |S|(1-s)^2 + (|V| - |S|)s^2 = |S|(1-s)$$

следует утверждение теоремы.

Применение в комбинаторике

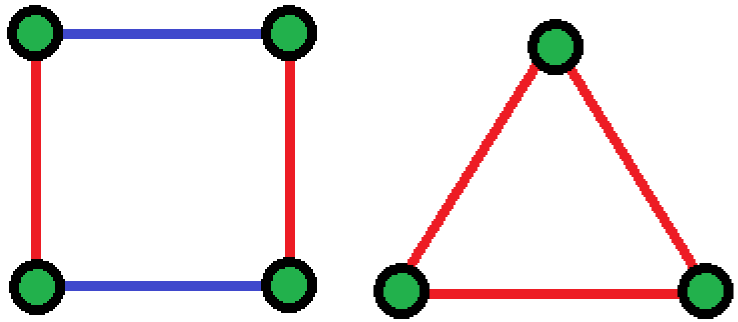
Теорема. $h(G) \geq \lambda_2(1-s)/2$, **где** $s = |S|/|V|$.

Следствие (можно показать, зная спектр гиперкуба), что для любого подмножества вершин $S : |S| \leq 2^{n-1}$ **справедливо** $|\partial S| \geq |S|$ **(это простое некомбинаторное доказательство).**

Теорема. В неориентированном мультиграфе число остовных деревьев равно

$$\det(L + J/n^2) = \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n / n.$$

Теорема $|V| = n = 2k$**, с.з. Лапласа** $0 \le \mu_1 \le \ldots \le \mu_n$**, если** $\mu_n \le 2\mu_2$**, то в графе есть совершенное соответствие (подмножество рёбер такое, что любая вершина инцидентна только одному ребру множества).**



Теорема Кратность нуля как с.з. (неориентированного графа) равна числу компонент связности.

Доказательство Вспомним, что $L = NN^{\mathrm{T}}$ **и** $Lx = 0 \Leftrightarrow N^{\mathrm{T}}x = 0$**.**

Как быть с двудольностью

Спектр Лапласа не распознаёт двудольность: $K_{1,3}$ **и** $K_1 \cup K_3$

Теорема **Кратность нуля как с.з. (неориентированного графа) беззнакового Лапласа равна числу компонент двудольности.**
Доказательство **аналогично.**

Теорема **Граф двудольный тогда и только тогда, когда спектр Лапласа равен "беззнаковому" спектру Лапласа.**

Доказательство **Пусть граф двудольный, заметим, что** $Q = DLD^{-1}$**, где** D **– диагональная матрица с элементами** ± 1 **на диагонали (помечает компоненты связности). Поэтому спектры матриц совпадают.**
Если совпадают спектры, то по предыдущим теоремам число компонент связности = числу двудольных компонент, поэтому граф двудольный.

Матрица смежности

$$A \text{ ~ с.з. } \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$$

$$L = kI - A \text{ ~ с.з. } 0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n$$

Теорема $d_{\mathrm{avr}} \leq \lambda_1 \leq d_{\max}$.

Доказательство

$$\lambda_1 = \max_x \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x} \geq \frac{\tilde{1}^{\mathrm{T}} A \tilde{1}}{\tilde{1}^{\mathrm{T}} \tilde{1}} = \frac{\sum A_{ij}}{n} = \frac{\sum \deg(i)}{n}$$

Пусть v – собственный вектор, соответствующий μ_1 с i-м максимальным элементом (можно считать ненулевым), тогда

$$\lambda_1 = \frac{(Av)_i}{v_i} = \frac{\sum\limits_{j:(i,j)\in E} v_j}{v_i} \leq \sum_{j:(i,j)\in E} \frac{v_j}{v_i} \leq \sum_{j:(i,j)\in E} 1 = \deg(i) \leq d_{\max}.$$

Теорема $d_{\text{avr}} \le \lambda_1 \le d_{\max}$.

Замечание Если удалить вершину с наименьшей степенью, то средняя степень d_{avr} неубывает, а λ_1 невозрастает, т.е. не смотря на оценку они ведут себя по-разному!

$$\lambda_1 = \max_x \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x} \ge \max_y \frac{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} A \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Следствие. Граф раскрашиваем в $d_{\max} + 1$ цвет (очевидно). Граф раскрашиваем в $\lfloor \lambda_1 \rfloor + 1$ цвет. **По индукции. Оценка точна!**

Замечание Хроматическое число

$$\ge \frac{\lambda_n}{\lambda_n - d_{\text{avr}}}.$$

Лемма. Если в конечном графе $\lambda_1 = d_{\max}$, то он $d_{\max}$-регулярный.

Для DM. Спектр пополнять другими характеристиками графа.

Теорема (Фробениуса-Перрона)

Пусть граф связный и взвешенный, тогда

1) $\lambda_1 \geq -\lambda_n$ [они все вещественные, пока не больше]

2) $\lambda_1 > \lambda_2$

3) для λ_1 есть положительный собственный вектор

Без доказательства?

Теорема (Фробениуса-Перрона для Лапласианов)

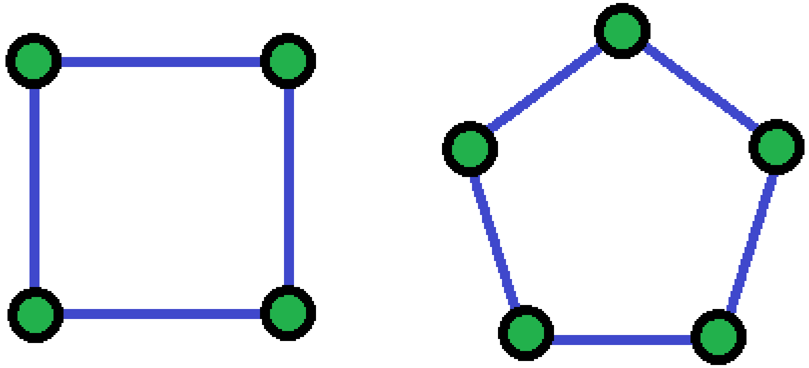
Пусть матрица M имеет неположительные недиагональные элементы, граф ненулевых недиагональных элементов связен.

Пусть λ_1 – наименьшее с.з. с с.в. v^1. Тогда можно выбрать v^1 положительным и λ_1 имеет кратность 1.

Теорема **Граф двудольный тогда и только тогда, когда для любого с.з. λ величина $(-\lambda)$ тоже является с.з.**

Связный граф с наибольшим с.з. λ двудольный тогда и только тогда, когда $(-\lambda)$ тоже является с.з.

Сильно регулярный граф **– простой, ориентированный, без петель, существуют параметры (n,k,k_1,k_2) такие, что $|V|=n$, $\forall i\ \deg(i)=k$, $\forall(i,j)\in E\ \deg(i,j)=k_1$, $\forall(i,j)\notin E\ \deg(i,j)=k_2$.**



(4,2,0,2), (5,2,0,1)

Теорема Для простого нетривиального (не полного и не пустого)графа порядка n следующие утверждения эквивалентны:

1) граф (n,k,k_1,k_2)-сильно регулярный

2) $A^2=(k_1-k_2)A+(k-k_2)I+k_2J$ для некоторых вещественных k,k_1,k_2

3) есть два с.з. с с.в. ортогональными к $\tilde{1}$

Доказательство Первые два утв. очевидно эквивалентны. Пусть верно второе и v – с.в. с с.з. λ, тогда

$$A^2v=(k_1-k_2)Av+(k-k_2)Iv+k_2Jv$$
$$\lambda^2v=(k_1-k_2)\lambda v+(k-k_2)v+k_2(\sum v_i)v$$

Для вектора ортогонального к $\tilde{1}$ –

$$\lambda^2=(k_1-k_2)\lambda+(k-k_2)$$

Здесь два разных решения.

Если верно третье утв. и соответствующие с.з. λ,λ', то

$$(A-\lambda I)(A-\lambda' I)=sJ$$

для некоторого J, поэтому $A^2\in\Lambda(A,I,J)$.

Теорема

Граф с одним с.з. – без рёбер

Связный граф с двумя с.з. – полный

Связный регулярный граф с 3 с.з. – строго регулярный

Связный регулярный граф с 4 с.з. – "walk-regular" (для любого $k \geq 2$ число путей через вершину длины k не зависит от вершины)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТГ

Теорема (Куранта-Фишера) **Пусть A – симметричная матрица с с.з. $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$, тогда**

$$\lambda_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x \in S} \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x} = \min_{\substack{T \subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=n-k+1}} \max_{x \in T} \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x}.$$

Следствие. **Если A – симметричная матрица с с.з. $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$, матрица B получена из неё удалением i-й строки и i-го столбца, её с.з. $\beta_1 \geq \ldots \geq \beta_n$, тогда**

$$\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq \beta_n.$$

тут ошибочка;)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТГ

$L \succ 0$, **если** L **– неотрицательно(!) определённая матрица**
$G \succ H$, **если** $L_G \succ L_H$, **если** $L_G - L_H \succ 0$

Лемма. Если $G \succ cH$, **то** $\mu_k(G) \geq c\mu_k(H)$ **для всех** k **(здесь умножение на** c **– умножение весов графа).**

Доказательство очевидно из

$$\lambda_k(G) = \max_{\substack{S \subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x \in S} \frac{x^{\mathrm{T}} L_G x}{x^{\mathrm{T}} x} \geq c \max_{\substack{S \subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x \in S} \frac{x^{\mathrm{T}} L_H x}{x^{\mathrm{T}} x} \geq c\lambda_k(H).$$

Аналогична монотонность при добавлении рёбер и увеличении отдельных весов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТГ

Теорема об аппроксимации

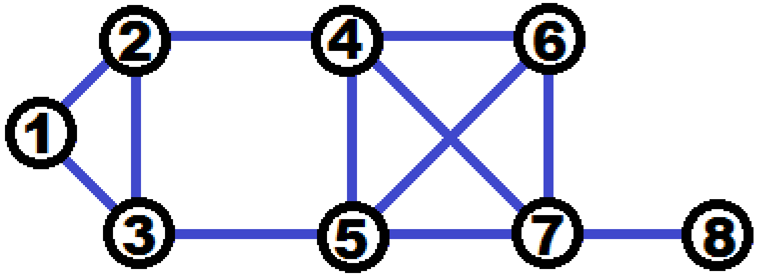
Для любого $\varepsilon > 0$ существует $d > 0$, что для всех достаточно больших n существует d-регулярный граф G:
$(1+\varepsilon)G \succ K_n \succ (1/(1+\varepsilon))G$.

Полные графы аппроксимируются графами с малым числом рёбер!

Из ПЗАД – разбиение графа по второму с.в.

Матрица смежности

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1					
2	1		1	1				
3	1	1			1			
4		1			1	1	1	
5			1	1		1	1	
6				1	1		1	
7				1	1	1		1
8							1	

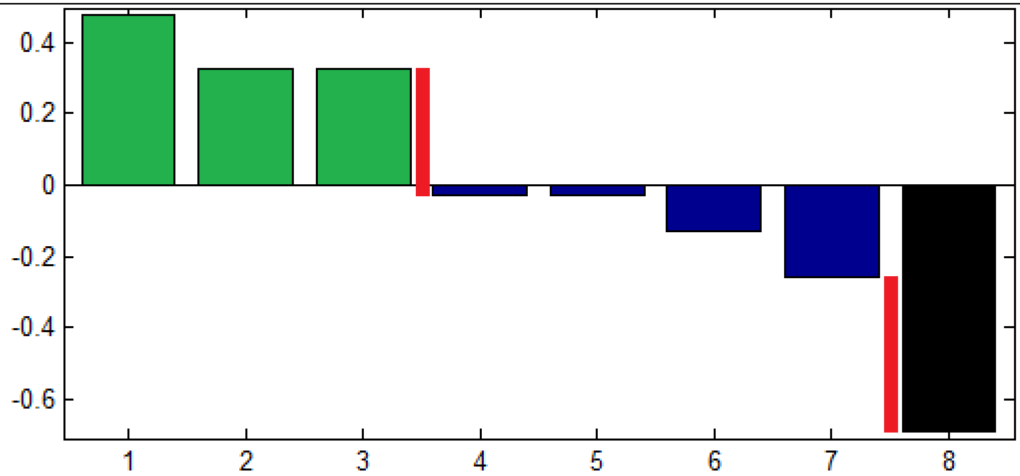


Матрица Лапласа

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	-1	-1					
2	-1	3	-1	-1				
3	-1	-1	3		-1			
4		-1		4	-1	-1	-1	
5			-1	-1	4	-1	-1	
6				-1	-1	3	-1	
7				-1	-1	-1	4	-1
8							-1	1

```
L = full(diag(sum(S))-S);
[X,Y] = eig(L);
bar(X(:,2))
```

```
-0.3536   0.4758   0.4032   0.6744   0.0000   0.1498  -0.0938  -0.0000
-0.3536   0.3271   0.1388  -0.4363   0.6015  -0.1862   0.1540  -0.3717
-0.3536   0.3271   0.1388  -0.4363  -0.6015  -0.1862   0.1540   0.3717
-0.3536  -0.0261  -0.3076  -0.1099   0.3717   0.3132  -0.4117   0.6015
-0.3536  -0.0261  -0.3076  -0.1099  -0.3717   0.3132  -0.4117  -0.6015
-0.3536  -0.1307  -0.4737   0.3524   0.0000  -0.7131   0.0292   0.0000
-0.3536  -0.2583  -0.1846   0.1162   0.0000   0.4336   0.7568   0.0000
-0.3536  -0.6889   0.5926  -0.0506  -0.0000  -0.1244  -0.1767  -0.0000
```



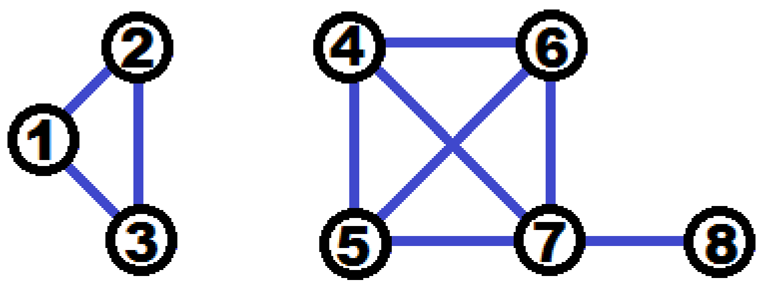
Всё содержится в одном векторе! И на одном слайде!

Из ПЗАД – разбиение графа по второму с.в.

Первый с.в. – константный

Второй с.в. – отражает разбиение графа

Но когда граф несвязный…



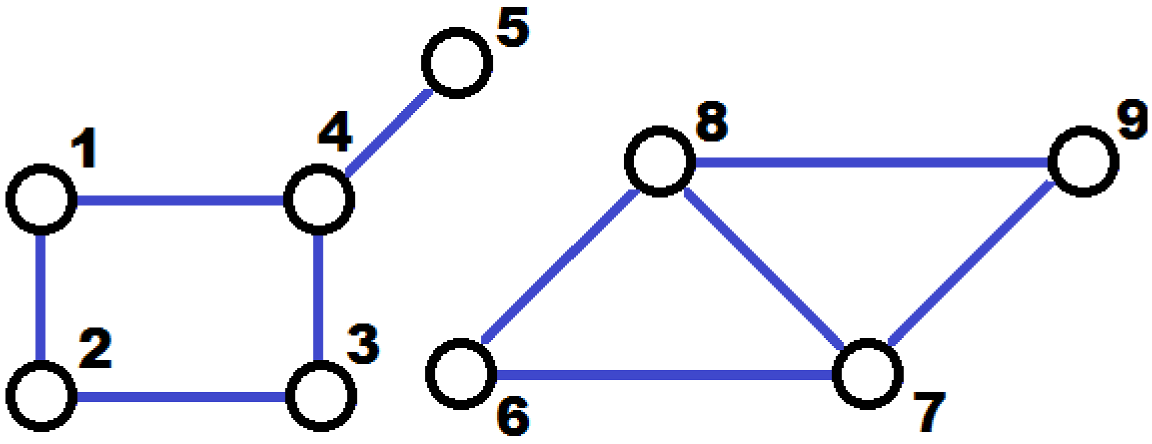

```
L =
full(diag(sum(S))-S);

[X,Y] = eig(L);
```

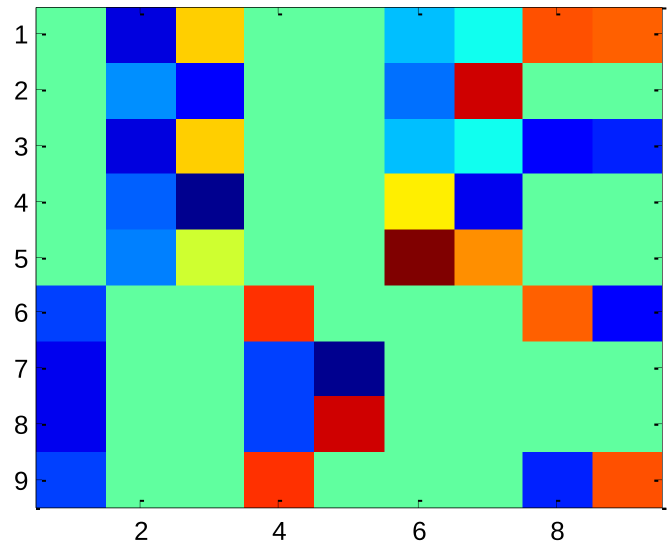
0.5774	0	0	0.2673	0.7715	0	0	0
0.5774	0	0	-0.8018	-0.1543	0	0	0
0.5774	0	0	0.5345	-0.6172	0	0	0
0	-0.4472	-0.2887	0	0	0.1274	-0.8065	0.2236
0	-0.4472	-0.2887	0	0	0.6348	0.5136	0.2236
0	-0.4472	-0.2887	0	0	-0.7621	0.2929	0.2236
0	-0.4472	0.0000	0	0	0	0	-0.8944
0	-0.4472	0.8660	0	0	0	0	0.2236

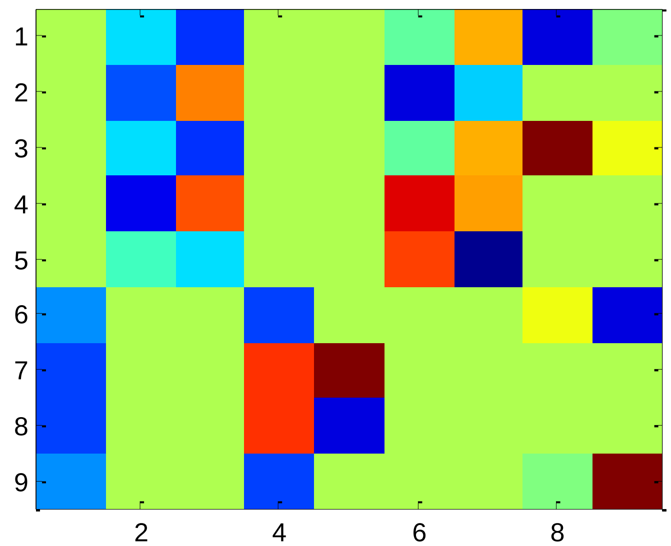
```
diag(Y)' =    -0.0000    0.0000    1.0000    3.0000    3.0000    4.0000    4.0000    5.0000
```

Теперь два «константных» вектора!

Из ПЗАД – SVD над матрицей смежности

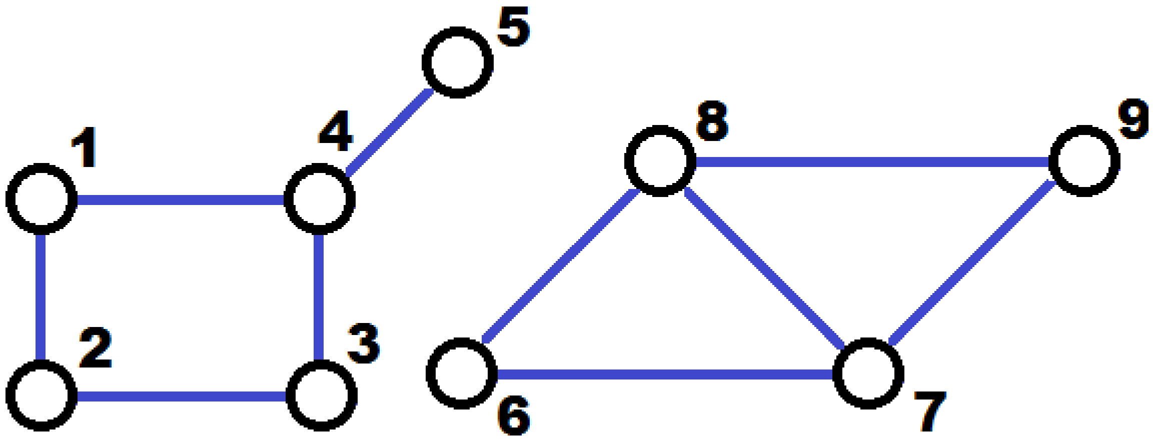


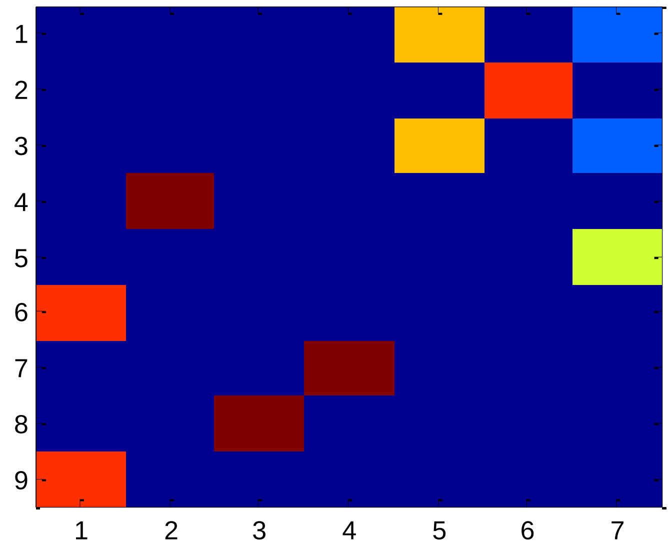


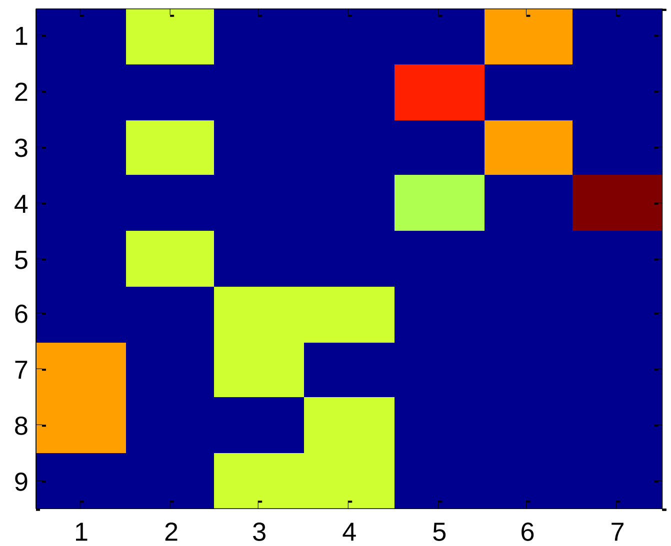



```
S = sparse([1 1 2 2 3 3 4 4 6 6 7 7 8 8 8 9 9 5 4 7], ...
           [2 4 1 3 2 4 1 5 7 8 8 9 6 7 9 8 7 4 3 6], 1)
[U L V] = svds(S,9);
disp(U)
disp(V)
disp(diag(L)')

    0.0000   -0.5295   -0.3893    0.0000    0.0000   -0.2441    0.0923   -0.2743    0.6518
    0.0000    0.3646   -0.4958   -0.0000   -0.0000   -0.2787   -0.7373   -0.0000   -0.0000
    0.0000   -0.5295   -0.3893    0.0000   -0.0000   -0.2441    0.0923    0.2743   -0.6518
    0.0000    0.4669   -0.6350    0.0000    0.0000    0.2176    0.5757    0.0000    0.0000
    0.0000   -0.2973   -0.2186   -0.0000   -0.0000    0.8694   -0.3286   -0.0000    0.0000
   -0.4352    0.0000   -0.0000   -0.5573    0.0000    0.0000         0    0.6518    0.2743
   -0.5573   -0.0000   -0.0000    0.4352   -0.7071    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
   -0.5573    0.0000   -0.0000    0.4352    0.7071         0    0.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.4352         0   -0.0000   -0.5573    0.0000   -0.0000         0   -0.6518   -0.2743

    0.0000    0.3893   -0.5295    0.0000    0.0000   -0.0923   -0.2441   -0.7068   -0.0208
    0.0000   -0.4958   -0.3646   -0.0000   -0.0000   -0.7373    0.2787    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.3893   -0.5295    0.0000    0.0000   -0.0923   -0.2441    0.7068    0.0208
    0.0000   -0.6350   -0.4669    0.0000    0.0000    0.5757   -0.2176    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.2186   -0.2973   -0.0000   -0.0000    0.3286    0.8694   -0.0000   -0.0000
   -0.4352         0   -0.0000    0.5573   -0.0000    0.0000         0   -0.0208    0.7068
   -0.5573         0   -0.0000   -0.4352    0.7071    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
   -0.5573   -0.0000   -0.0000   -0.4352   -0.7071   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000
   -0.4352         0   -0.0000    0.5573   -0.0000         0         0    0.0208   -0.7068

    2.5616    2.1358    2.1358    1.5616    1.0000    0.6622    0.6622    0.0000    0.0000
```

Из ПЗАД – Неотрицательные матричные разложения








```
S = sparse([1 1 2 2 3 3 4 4 6 6 7 7 8 8 8 9 9 5 4 7], ...
           [2 4 1 3 2 4 1 5 7 8 8 9 6 7 9 8 7 4 3 6], 1)
[U,V] = nnmf(S,7);
disp(U)
disp(V')

        0         0    0.0000         0    1.1234    0.0000    0.4880
        0         0    0.0000    0.0000         0    1.4142    0.0000
        0         0    0.0000         0    1.1234    0.0000    0.4880
        0         0    0.0000    1.7070    0.0000    0.0308         0
   0.0000    0.0000         0         0         0         0    1.0000
   0.0006    1.4145         0         0    0.0000         0         0
   2.8290    1.4145         0    0.0000    0.0000         0         0
   0.0000    0.0000    1.7321         0         0         0    0.0000
   0.0006    1.4145         0         0    0.0000         0         0

   0.0000         0         0    0.5731    0.0000    0.7071         0
   0.0000         0         0         0    0.8901    0.0000    0.0000
   0.0000         0         0    0.5731    0.0000    0.7071         0
   0.0000         0         0         0    0.4557         0    1.0000
        0         0         0    0.5858         0         0         0
   0.7071         0    0.5774         0    0.0000         0         0
        0    0.7072    0.5774         0         0         0         0
   0.0000    0.7070         0         0    0.0000    0.0000         0
   0.7071         0    0.5774         0    0.0000         0         0
```

Потом добавить большие реальные графы (есть в разборах)...